Estimación de la resistencia característica del hormigón: como es de preciso el ajuste con la función de distribución normal*

*Estimating concrete characteristic strength: how far is the normal distribution from the target***

Jorge del Pozo Martín, Antonio Aguado de Cea[a], Sergio H.P. Cavalaro[b]

[a] Prof. Dr. Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Catedrático de Universidad. Universidad Politécnica de Cataluña

[b] Prof. Dr. Infrastructure Systems of School of Architecture, Building and Civil Engineering. Loughborough University

RESUMEN

La referencia característica del hormigón se calcula con el cuantil 5% de la resistencia a compresión estimada a partir de un número finito de ensayos, asumiendo que los resultados obtenidos siguen una distribución normal. En el presente trabajo se analizan un número elevado de ensayos de diferentes hormigones, comprobando que en ocasiones ni siquiera se cumple la hipótesis de normalidad. Al realizarse ajustes con varias distribuciones estadísticas alternativas, se ha podido comprobar una mejor calidad de los ajustes con varias distribuciones alternativas a la normal, lo que podría traducirse en una modificación del valor de la resistencia media objetivo.

ABSTRACT

The concrete characteristic stregth is calculated with the quantile 5% of the compressive strength estimated from a finite number of tests, assuming that the results follow a normal distribution. In this paper, a large number of tests of different concretes are analyzed, checking that sometimes the normality hypothesis is not even fulfilled. By making adjustments with some alternative statistical distributions, it has been possible to verify a better quality of the adjustments with several alternative distributions to the normal function, which could result in a modification of the value of the target average resistance.

PALABRAS CLAVE: resistencia característica, resistencia a compresión, distribución normal.
KEYWORDS: characteristic strength, compressive strength, normal distribution.

1. Introducción

Para la determinación de la resistencia característica a compresión del hormigón, se utiliza, mayoritariamente, una distribución normal. Ello ha supuesto una consolidación de esa hipótesis sin una revisión de la misma en los últimos años, en los que se han producido avances en las prestaciones de los hormigones.

En amplias campañas recientes de control de producción y de recepción de hormigones (del Pozo et al, 2017)[1] se ha visto que hay discordancias con esta hipótesis en cuanto a la precisión de la misma; habiendo otros tipos de funciones que se ajustan de forma más satisfactorias.

Dada la importancia que este tema tiene en la práctica, la presenta comunicación tiene por objeto cuestionar la precisión de la función de distribución normal, así como analizar otras alternativas: Weiwull, log-normal

2. La utilización de la distribución normal para estimar el valor de la resistencia característica.

En la redacción de proyectos de cálculos de estructuras de hormigón, la resistencia característica del material, fck, es el valor de la resistencia a compresión uniaxial, denominándose también resistencia característica especificada o resistencia de proyecto.

La resistencia real de obra fck real, es el valor que corresponde al cuantil del 5 por 100 en la distribución de resistencia a compresión del hormigón colocado en obra. De este modo, solo el 5% del hormigón colocado en obra tendría un valor inferior al de la resistencia característica utilizado en los cálculos estructurales.

La resistencia característica estimada fc est es el valor que estima o cuantifica la resistencia característica real de obra a partir de un número finito de resultados de ensayos normalizados de resistencia a compresión realizados con probetas tomadas en obra. Esta magnitud es la que utiliza el control de calidad para estimar si en un porcentaje suficiente de las amasadas fc real > fck.

Para comprobar si el valor de las resistencias de compresión de un hormigón utilizado en una obra de construcción es aceptado para su uso, tradicionalmente se ha utilizado la estadística sobre los valores de ensayos realizados en su fabricación y en su recepción en obra para compararlo con el valor utilizado en la redacción del proyecto. Para ello es necesario aproximar la muestra a una función de distribución estadística que ajuste adecuadamente los resultados de los ensayos, y con esa función estadística obtener el valor de la resistencia característica estimada.

En la Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado del año 1968, en el artículo 10, Hormigones, la resistencia característica se definía como la calculada en base a n ensayos de resistencia sobre probetas, al multiplicar por dos la media aritmética de los n/2 resultados más bajos y restar después la media aritmética del conjunto de los n resultados. Este artículo parecía no incluir ningún tipo de distribución estadística, pues la fórmula para el cálculo de la resistencia característica no responde a ninguna función de distribución.

La Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado, EH73 [2], es la primera que asume una distribución poblacional normal para los ensayos de resistencia a compresión uniaxial. En ella se define la resistencia característica como el valor que corresponde al cuantil del 5 por 100 en la distribución de resistencias del hormigón colocado en obra. En el artículo 28, Características del hormigón, se presupone que "La resistencia del hormigón colocada en obra es una variable aleatoria con función de distribución, en general, desconocida." Sin embargo, en este mismo artículo, se asume que las resistencias de un hormigón se distribuyen con aproximación suficiente a una distribución gaussiana, la habitualmente conocida como función de distribución normal, la distribución de probabilidad de variable continua más habitualmente utilizada.

En los artículos 62, Ensayos previos, se define el objetivo de dichos ensayos como la estimación de la resistencia media del hormigón de la obra, la cual debería coincidir con el hormigón fabricado en el laboratorio, y aunque se afirmaba que estos ensayos no aportarían información sobre la función de distribución del hormigón de la obra, en base a la experiencia se presupone la normalidad de la población, al igual que en el artículo 64, Ensayos de control.

La fórmula para aceptar el hormigón fabricado en obra es:

$$f_{ck} \leq f_{cm} (1 - 1{,}64\delta)$$

siendo f_{cm} la resistencia media y δ el coeficiente de variación de la población (desviación cuadrática media relativa), lo cual equivale al cuantil del 5 por 100 de la función de distribución normal. De este modo, la probabilidad de que un hormigón rompa con una resistencia inferior a su resistencia característica real es de un 5%, siempre y cuando estos ensayos se distribuyan según una función normal, no requiriéndose en la norma realizar una comprobación de que sea así.

Esta normativa no justifica la elección de que los ensayos se distribuyen según una distribución normal, más allá de la experiencia, sin aportar los estudios realizados. En la misma época, Dayaratnam, P et al (1976) [3], publicaron un estudio estadístico donde se estudiaron datos de ensayos de compresión sobre probetas cúbicas de 150 milímetros realizados durante 10 años, con resistencias características de 150 kg/cm^2, 250 kg/cm^2 y 350 kg/cm^2. El análisis estadístico indicó que la resistencia de casi todos los grupos analizados podía ajustarse a una distribución normal con un nivel de significación del 1%, exceptuando un pequeño grupo de muestras de 150 kg/cm^2 de resistencia característica.

En la actual normativa técnica, la Instrucción de hormigón estructural, EHE-08 [4], en el anexo 22, de Ensayos previos y característicos del hormigón, se mantiene que la distribución de la resistencia a compresión del hormigón es gaussiana, cambiando la fórmula de la EH73 por

$$f_{ck} < \bar{x} - 1{,}645\sigma$$

Esto es debido a que la función de densidad normal no tiene primitiva, por lo que para calcular probabilidades se utilizan procedimientos aproximativos con tablas que permiten calcular probabilidades de variables aleatorias con distribución Normal (0;1). El valor correcto es 1,645 en lugar de 1,64, suponiendo que en la normativa del año 1973 se utilizó una aproximación. En la actual normativa se mantiene la tradicional normalidad de la distribución, sin haberse cuestionado la decisión que motivo su elección.

3. Razones para cuestionar el uso de la distribución normal y motivos para la elección de otras funciones de distribución

Aunque la elección de la distribución normal podría estar reforzada en el pasado con estudios realizados sobre una muestra de ensayos, en este punto se exponen motivos para cuestionar la utilización de la distribución normal, dado que no existe ninguna base teórica para justificar esta elección y se eligen otras distribuciones que pueden ajustar la resistencia a compresión con una justificación teórica y con una mayor precisión.

3.1 Función de distribución log-normal

La utilización de la función de distribución lognormal en varios ajustes poblacionales aparecen en Limpert et al (2001 y 2011) [5][6], en los que se exponen problemas que se han generado con la utilización de la distribución normal en diversas investigaciones en numerosas ciencias como la medicina, biología, ecología marina, física, edafología, fitopatología o aerobiología. Aunque ninguna de estas ciencias trabajase con ensayos sobre el hormigón, los problemas que causa su uso afectarían de igual modo a su aplicación a los ensayos a compresión simple en hormigones.

Uno de los problemas fundamentales en su utilización es cuando los datos no se distribuyen de una manera simétrica y con forma de campana de Gauss, con una alta frecuencia de datos en torno a la media. Esta forma es una suposición que debe estar contrastada, y que puede llevar a rechazar el uso de la distribución normal. También se genera un problema cuando al realizar un ajuste de datos con la distribución normal, la media y la desviación típica son del mismo orden, de manera que parte de la población podrían tener valores negativos y al obtener el cuantil del 5%, habitualmente utilizado como valor umbral, se pueden llegar a obtener valores negativos, imposibles en la vida real para numerosas magnitudes, como es el caso de la resistencia a compresión.

Una alternativa propuesta en Limpert et al (2001 y 2011) [5][6] es la función de distribución lognormal, aquella función en la que los datos transformados logarítmicamente están normalmente distribuidos. Esta distribución proporciona un buen ajuste en aquellos datos asimétricos con una cola a la derecha de valores altos sobre la media. Las distribuciones asimétricas son particularmente comunes cuando los valores medios son bajos respecto a valores máximos, varianzas grandes y donde la mayoría de los valores ocurren en las proximidades de un valor mínimo. Por tanto, la transformación logarítmica de la variable se ve apoyada con el tradicional uso de logaritmos en la escalera de Tukey, para la transformación de datos cuantitativos cuando una variable tiene una asimetría positiva.

La distribución lognormal está indicada para parámetros que son resultantes de un número elevado de causas independientes con efectos positivos, que se componen de manera multiplicativa y teniendo cada una de estas causas una influencia despreciable frente a la global. Mientras efectos aditivos conducen a la distribución normal de acuerdo con el teorema central del límite en su forma aditiva, el teorema central del límite en su forma multiplicativa conduce a una distribución lognormal, lo cual podría estar sostenido por la dependencia de la resistencia del hormigón en base a varias variables compuestos de este modo.

Así pues, de estos estudios parece justificarse que el uso de la distribución normal, basado en la sencillez de su uso, su forma simétrica acampanada que ajusta gran cantidad de fenómenos reales, la sencillez de su formulación y una ley de errores aditiva, desarrollada antes que una multiplicativa, no es siempre idóneo y debe justificarse y rechazarse en ocasiones. Además, las distribuciones asimétricas a menudo se han convertido falsamente en simétricas al eliminar en el tratamiento de datos los valores extremos por considerarse outliers.

En otras ocasiones, conjuntos de datos asimétricos se han unido unos con otros para analizarse conjuntamente al observarse que juntos sí formaban un conjunto simétrico que podría ajustarse mediante una distribución normal.

3.2 Función de distribución de Weibull

Las publicaciones relacionadas con la creación de esta distribución estadística (Weibull 1939 y 1951), fueron "A statistical theory of the strength of materials." y "A Stadistical Distribution Function of Wide Applicability". [7][8].

El análisis del estudio de resistencia de materiales mediante Weibull se basa en que la rotura en un material, considerado como isotrópico, homogéneo, sufre la rotura en el defecto más crítico, no asociándose la rotura a ningún otro defecto presente en el material. Si se supone el material como una cadena que consta de varios eslabones, se podría decir que rompe por el eslabón más débil. Considerando que Fn(σ) es la probabilidad de fallo de la cadena y F(σ) la probabilidad de fallo de cada eslabón, estando compuesta la cadena por n eslabones, se cumpliría la ecuación

$$1 - Fn(\sigma) = (1 - F(\sigma))^{n}$$

Weibull propuso una función de distribución de probabilidad, correspondiente a la probabilidad de fallo de la pieza, donde F=0 cuando no hay fractura, y F=1 hay fractura, correspondiente a esta expresión:

$$F = 1 - \exp[-V\, (\frac{\sigma - \sigma u}{\sigma o})^{m})]$$

donde: V es el volumen del componente

σ la tensión aplicada en el material

σu es la tensión umbral por debajo de la cual la probabilidad de fractura es nula, tomándose habitualmente el valor de cero.

σ_o es un factor de escala de la distribución y se denomina tensión característica o vida característica y corresponde a una probabilidad del 0.63. Este valor define la posición de la curva de Weibull respecto del valor umbral, lo cual es análogo a la forma en que la media define la posición de una curva Normal

m es el llamado módulo de Weibull, que da cuenta de la variabilidad en la resistencia a fractura del material (a mayor m, menor variabilidad)

Una de las ventajas de esta función de distribución es la variedad de formas que puede adoptar en función de los valores de estos parámetros, pudiendo ajustar gran cantidad de fenómenos físicos. La otra hipótesis que motiva al ajuste de los resultados con una función de Weibull es la hipótesis de rotura frágil de los actuales hormigones cuya estructura interna conduce a una rápida e inestable propagación de microgrietas en lugar de la tradicional rotura de hormigones por un lento crecimiento de grietas que acaban formando una zona de fallo. (Kameswara Rao et al. 1974 [9]).

4. Ajustes de espacios muestrales con diferentes funciones de distribución alternativas.

En la presente ponencia se realizan ajustes de distribución sobre varias muestras poblacionales de ensayos de resistencia a compresión simple de hormigones procedentes de la misma central de hormigonado. Las muestras se corresponden a varios valores de resistencia característica objetivo, con objeto de verificar el cumplimiento de la hipótesis de normalidad mediante un ajuste con esta función de distribución, así como el ajuste de estas muestras con dos funciones de distribución alternativas, la log-normal y la Weibull. Finalmente, también se realiza un estudio del valor del cuantil del 5 por 100, tanto de la propia muestra como los obtenidos con las tres funciones de distribución analizadas, para observar la precisión de dichos ajustes en la obtención del valor de la resistencia característica.

4.1 Metodología de trabajo

Los datos se asumen como no censurados, y por tanto representan muestras aleatorias de la distribución seleccionada. Para los datos analizados, todos ellos valores de resistencia a compresión simple a 28 días en megapascales (MPa), cada conjunto de datos analizados representa una muestra aleatoria simple de una población X de hormigones de una resistencia característica fck, con un tamaño n.

Los estimadores son obtenidos usando Estimación de Máxima Verosimilitud (EMV). Se considera una muestra aleatoria simple de tamaño n, y las n observaciones son independientes en la población X. Esta población tiene una función de densidad conjunta de todas las observaciones que bajo condiciones de independencia es igual al producto de las funciones de distribución de cada medida. Suponiendo un único parámetro θ:

$$f(x1, x2, \ldots, xn \mid \theta) = f(x1)\, f(x2) \ldots f(xn)$$

La función de verosimilitud L es la probabilidad de observar estos valores x1, x2, ….., xn fijos en la muestra, pudiendo variar el parámetro θ libremente:

$$L(\theta \mid x1, x2, \ldots, xn) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

El método EMV encuentra aquellos parámetros de la distribución a la que queremos ajustar que proporcionan a los valores de la muestra la probabilidad más alta.

Por esto, los estimadores de máxima verosimilitud del parámetro o los parámetros serán aquellos que maximizan esta función de verosimilitud, calculando el sistema de ecuaciones en las que las derivadas parciales respecto a cada parámetro se igualan a cero. Habitualmente se trabaja con la función logaritmo de la función de verosimilitud, más fácil de manejar.

Este método de máxima verosimilitud proporciona estimadores consistentes, asintóticamente eficientes, insesgados y normalmente distribuidos en muestras grandes.

El software Statgraphics calcula para cada una de las tres distribuciones elegidas los parámetros que las representan:

- Normal: media y desviación estándar
- Weibull de 3 parámetros: forma, escala y umbral inferior
- Lognormal de 3 parámetros: media, desviación estándar y umbral inferior.

Para estos ajustes se realizan varias pruebas de bondad de cada ajuste, cuyo objetivo es evaluar la bondad del ajuste de los datos de dicho espacio muestral a la distribución candidata, todas ellas con un nivel de significación del 95%. Las tres pruebas de bondad de ajuste escogidas son:

La chi-cuadrado, de Karl Pearson (Chernoff et al 1954 [10]) El test chi-cuadrado es una prueba no paramétrica que mide la discrepancia entre una distribución observada y otra teórica (bondad de ajuste), indicando en qué medida las diferencias existentes entre ambas, de haberlas, se deben al azar en el contraste de hipótesis. En esta prueba no se trabaja con los valores de las observaciones, sino con las frecuencias, comparándose las frecuencias observadas (fo) y las frecuencias esperadas (fc), estás últimas obtenidas mediante una distribución teórica.

El procedimiento comienza por establecer una hipótesis nula Ho, la cual es la aceptación de que una distribución empírica se ajusta a una distribución, en este caso se realiza la prueba contra las tres distribuciones para cada espacio muestral, la Normal, la Weibull de 3 parámetros y la lognormal de 3 parámetros.

En caso de que el resultado del cálculo del estadístico χ^2 fuera igual a cero, las distribuciones teórica y empírica ajustarían exactamente, mientras que, si el estadístico χ^2 es mayor a cero, dichas distribuciones difieren. Se debe comparar el valor calculado del estadístico χ^2 por la ecuación anterior con el valor crítico de χ^2, con niveles para el nivel de significancia adoptado, convencionalmente 0,05 ó 0,01, y que en este estudio se fija en 0.05. Este nivel de significancia representa la probabilidad de equivocarse si la distribución candidata es la adecuada. En caso de que el valor del estadístico χ^2 fuera mayor del valor tabulado para esta función, se podría afirmar que las frecuencias observadas son significativamente diferentes de las frecuencias esperadas y por tanto la hipótesis nula Ho se rechazaría y el ajuste a la distribución estadística correspondiente no se podría darse por válido.

Si ocurre lo contrario y el estadístico fuera inferior al valor del estadístico tabulado para el nivel de confianza 0,05, se aceptaría la hipótesis nula y por tanto el ajuste sería válido para este nivel de significancia.

Otro modo de análisis es calcular si el valor p es inferior al nivel de significación, entonces la hipótesis nula es rechazada. Este valor p está definido como la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que realmente se ha obtenido (valor del estadístico calculado), suponiendo que la hipótesis nula es cierta, en términos de probabilidad condicional. Por tanto, este valor p es la probabilidad que queda a la derecha del valor del estadístico calculado en la distribución de referencia.

Cuanto menor sea el valor p, más significativo será el resultado, el estadístico se encuentra en zonas de muy poca probabilidad y el ajuste no es satisfactorio. En caso contrario, para valores más altos de p que el nivel de significancia adoptado, no se puede rechazar la hipótesis nula, y por tanto no se puede rechazar la idea de que la distribución se ajuste a la distribución con la que estamos ajustando (Normal, Weibull de 3 parámetros y lognormal de 3 parámetros).

La ventaja de este análisis con valor p es que este es un valor de probabilidad, que facilita la comparación entre las tres pruebas de bondad frente a la comparación de los resultados de cada uno de los estadísticos, por lo que se ha elegido este método en las tres pruebas de bondad, así como en la prueba de normalidad.

Aunque esta prueba es considerada válida tanto para distribuciones discretas como continuas, se recomienda su uso para distribuciones discretas.

La Kolmogorov-Smirnov, (Kolgorov 1941 [10]) es una prueba no paramétrica, aplicable a funciones continuas, que compara la función de distribución, de probabilidad acumulada, teórica y observada, midiendo la distancia entre ambas curvas. El estadístico de esta prueba, Dn es calculado como el valor de diferencia máxima en valor absoluto entre la función de distribución de probabilidades de la muestra observada respecto de la función de distribución de probabilidades teórica.

La distribución del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es independiente de la distribución poblacional especificada en la hipótesis nula y los valores críticos de este estadístico están tabulados en base al nivel de significación establecido y el tamaño muestral.

La prueba no paramétrica de Anderson Darling fue propuesta por Theodore Wilbur Anderson y Donald A. Darling (Anderson 1952 y 1954)[12] para comprobar si los datos de una muestra provienen de una distribución específica. Esta prueba es una modificación de la prueba de Kolmogorov Smirnov, y por tanto aplicable también a distribuciones continuas. En esta prueba se da más peso o ponderación a los valores extremos (las colas) que la prueba

Kolmogórov-Smirnov, dependiendo los valores críticos de la distribución específica que se está probando. Esto es por tanto una ventaja, siendo una prueba más sensible, pero a su vez presenta la desventaja, los valores críticos se deberán calcular para cada distribución.

4.2 Resultados del análisis estadístico de las muestras poblacionales.

Para la realización de este análisis se han tomado muestras de ensayos a compresión simple a 28 días de hormigones con varias resistencias características objetivo de la misma central de hormigonado.

Tras seguir la metodología expuesta, se muestran los resultados de las pruebas de bondad de ajuste para cada espacio muestral en la tabla 1, correspondientes varios hormigones de resistencias características de 20, 25, 30, 35 y 40 MPa.

Tabla 1. Pruebas de bondad realizadas sobre los ajustes con las tres funciones de distribución candidatas

Espacio muestral MPa	**Función de distribución**	**Chi Cuadrado**	**Kolmorov-Smirnoff**	**Anderson Darling**
	Normal	9.54 E-05	0.022	3.22 E-13
20	Lognormal	0.39	0.56	>=0.10
	Weibull	1.79 E-06	0.0002	<0.01
	Normal	0	2.99 E-06	<0.01
25	Lognormal	2.27E-06	0.33	<0.10
	Weibull	0	0	<0.01
	Normal	2.87E-08	0.0007	<0.01
30	Lognormal	0.13	0.68	>=0.10
	Weibull	0	1.33E-05	<0.01
	Normal	0.9871	0.87	>=0.10
35	Lognormal	0.9877	0.76	>=0.10
	Weibull	0.88	0.55	<0.01
	Normal	0.0029409	0.25	>=0.10
40	Lognormal	0.002918	0.26	>=0.10
	Weibull	0.00754	0.51	>=0.10

Observando los resultados de la prueba de normalidad, analizada con el ajuste Chi Cuadrado de la función de distribución normal, se puede afirmar que la muestra no puede ajustarse a una función normal en los casos de las muestras de 20, 25, 30 y 40 MPa pues su valor p es inferior a 0.05, pudiendo aceptarse la hipótesis de normalidad solamente en el caso de la muestra de 35 MPa.

Las pruebas de bondad de los diferentes ajustes devuelven valores p mayores o iguales en el ajuste de la distribución lognormal frente a las otras dos funciones en la amplia mayoría de los casos, pudiendo afirmarse que la función lognormal ajusta las muestras mejor que las funciones normal y Weibull

Otro análisis realizado en todas las muestras es el realizado sobre la representación gráfica del ajuste, mostrándose como ejemplo el caso del ajuste del espacio muestral de resistencia característica 20 MPa, representado en la figura 1.

La representación gráfica de la figura 1 ratifica los resultados de las pruebas de bondad, observándose que la distribución lognormal ajusta mejor que las funciones normal y Weibull.

El último análisis realizado es el análisis de las diferencias entre los cuantiles del 5% de cada muestra y los estimados por cada función de distribución, mostrados en la tabla 2.

De los valores de la tabla 2 se puede concluir que el valor del cuantil del 5%, correspondiente al valor de la resistencia característica estimada del hormigón, objetivo último del ajuste con las diferentes funciones de distribución, es más preciso mediante el ajuste con una función de distribución lognormal frente a las funciones normal y Weibull.

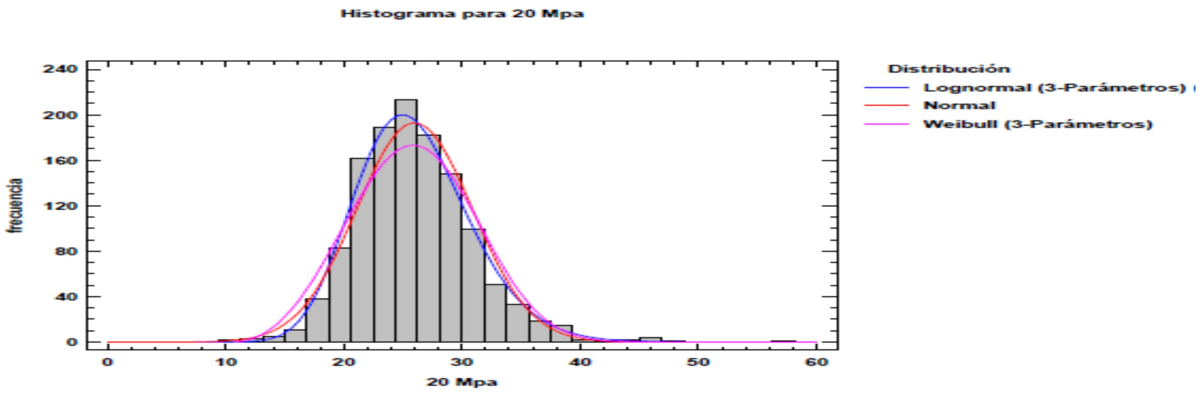

Figura 1. Representación gráfica del ajuste estadístico del espacio muestral 20 MPa

Tabla 2. Diferencias en valor absoluto entre el cuantil del 5% de la muestra y las estimadas por las funciones de distribución

Muestra MPa	Normal %	Lognormal %	Weibull %
20	5.31	1.55	8.36
25	2.64	0.97	6.90
30	2.88	0.77	4.67
35	0.48	0.66	0.88
40	3.73	3.82	1.87
Valor medio	3.01	1.55	4.54

5. Conclusiones

Este estudio de la utilización de la función normal en la estimación de la resistencia característica del hormigón permite extraer las siguientes conclusiones:

La utilización de la función normal es fenomenológica, no existiendo ninguna razón teórica que lo sustente, salvo estudios empíricos de mucha antigüedad. Su utilización puede conducir a obtener valores negativos de la resistencia a compresión simple, y supone también una distribución simétrica de resultados en torno a la media.

La función lognormal puede ser más adecuada por la frecuente asimetría de las muestras, en lugar de la simetría supuesta por la utilización de la función normal, y porque la resistencia del hormigón podría depende de un número elevado de variables con efectos positivos, que se componen de manera multiplicativa en lugar de aditivamente como sucede en la función normal.

El análisis estadístico realizado sobre muestras estadísticamente representativas de 5 familias de hormigones ratifica la hipótesis de un mejor ajuste con una distribución lognormal, observándose el incumplimiento de ajuste de la función normal en la amplia mayoría de los casos.

6. Referencias

[1] del Pozo, J., Aguado, A. Cavalaro, S.H.P. and Abellan, Mª.J. ¿Tiene sentido mantener un doble control de calidad del hormigón con un control de recepción y un control de producción? VII Congreso ACHE 2017. A Coruña, 20-22 junio 2017

[2] EH1973 Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. Decreto 3062/1973. BOE 293/1973

[3] Dayaratnam, P. and Ranganathan, R. (1976) Statistical analysis of strength of concrete, Building and Environment, 11(2), 145-152.

[4] EHE (2008) Instrucción del Hormigón Estructural, Comisión Permanente del Hormigón, Ministerio de Fomento.
[5] Weibull W. (1939) A statistical theory of the strength of material. Proceedings of the Royal Swedish Institute for Engineering Research No. 151:1.
[6] Weibull, W. (1951) A statistical distribution function of wide applicability. Journal of Applied Mechanics, 18: 293–297.
[7] Limpert E, Stahel WA and Abbt M. (2001) Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues. BioScience Vol. 51
[8] Limpert E and Stahel WA (2011) Problems with Using the Normal Distribution – and Ways to Improve Quality and Efficiency of Data Analysis. PLoS ONE Volume 6 Issue 7: e21403.
[9] Kameswara Rao, C.V.S. and Swamy, R.N. (1974).A statistical theory for the strength of concrete", Cement and Concrete Research, 4(4), 669-681.
[10] Chernoff, H., Lehmann, E. L. (1954) The use of maximum likelihood estimates in χ 2 tests for goodness of fit. Ann. Math. Statistics 25, pp. 579-586.
[11] Kolmogorov, A. (1941) Confidence limits for an unknown distribution function. The annals of mathematical statistics. 12, 461-463.
[12] Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1954) A test of goodness of fit, J. Amer. Statist. Assoc. 49(268). 765–769.