

# Análisis bajo cargas de larga duración de miembros compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente

*Analysis under long-term loads of concrete composite members with unbonded internal prestressing*

Pablo M. Páez<sup>\*, a</sup>, Berardi Sensale-Cozzano<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Prof. Asistente. M.Sc. Doctorando. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

<sup>b</sup> Prof. Titular. Dr. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

## RESUMEN

En este trabajo se propone un algoritmo computacional para el análisis a lo largo del tiempo de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes en estado de servicio sin utilizar elementos finitos. La formulación propuesta está basada en el método paso a paso, tiene en cuenta el estado no fisurado y fisurado del miembro, la fluencia y retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. A partir de la comparación con estudios experimentales, como principal conclusión mencionaremos que el modelo computacional propuesto predice satisfactoriamente la pérdida de pretensado y las deformaciones del miembro a lo largo del tiempo.

## ABSTRACT

In this work a computational algorithm for the analysis over time of concrete composite members with unbonded internal prestressing in service state without using finite elements is proposed. The proposed formulation is based on the step-by-step method, takes into account the cracked and uncracked state of the member, the creep and shrinkage of the concrete, the relaxation of the prestressing steel and the presence of non-prestressed steel reinforcing. From the comparison with experimental studies, as a main conclusion we mention that the proposed computational model successfully predicts the prestress loss and the deformations of the member over time.

**PALABRAS CLAVE:** pretensado no adherente, miembros compuestos, pérdida de pretensado.

**KEYWORDS:** Unbonded prestressed, composed members, prestress loss.

## 1. Introducción

Existen muchas situaciones en la práctica de la ingeniería estructural donde es necesario estimar la pérdida de pretensado en vigas de hormigón pretensadas de sección compuesta, como por ejemplo en las vigas de puentes. La estimación exacta de la pérdida de pretensado en este tipo de miembros estructurales es muy difícil, incluso

mediante análisis complejos como puede ser el método paso-a-paso, no solo por la precisión en la estimación de los parámetros envueltos en el fenómeno sino también porque la acción compuesta comienza a desarrollarse gradualmente a lo largo del tiempo.

El análisis se vuelve aún más complejo si las vigas son elementos pretensados con pretensado interior no adherente. El pretensado interior no adherente está caracterizado por no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón, lo que significa que el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea pueden moverse uno con respecto al otro.

Existen relativamente pocos trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento en servicio de vigas pretensadas con pretensado interior no adherente sometidas a cargas de larga duración [1-4]. Sin embargo no existen trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento bajo cargas de larga duración de miembros compuestos con pretensado interior no adherente. Este trabajo se enfoca en el análisis en servicio bajo cargas de larga duración de miembros compuestos de hormigón pretensado con pretensado interior no adherente. Basados en el método de paso-a-paso en este trabajo se propone un algoritmo computacional para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes sin utilizar elementos finitos. La originalidad de este trabajo se encuentra en la formulación propuesta. Esta formulación tiene en cuenta el estado no fisurado y fisurado del miembro, la fluencia y retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Además, el trazado de los tendones puede ser genérico.

La eficacia del algoritmo computacional propuesto es evaluada a partir de la comparación con estudios experimentales, obteniendo como principales conclusiones que el modelo computacional propuesto predice satisfactoriamente la pérdida de pretensado y las deformaciones del miembro a lo largo del tiempo.

## 2. Relaciones constitutivas

### 2.1 Hormigón

La deformación unitaria total en el tiempo de una fibra de hormigón puede escribirse como la Ecuación (1) [5]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) + \varepsilon_T \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_e(t)$  es la deformación unitaria elástica,  $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$  es la deformación unitaria por fluencia entre los tiempos  $t_0$  y  $t$ ,  $\varepsilon_{sh}(t, t_s)$  es la deformación unitaria debida a la retracción entre los tiempos  $t_s$  y  $t$ , y  $\varepsilon_T$  es la deformación unitaria de origen térmico.  $t_0$  y  $t_s$  corresponden a la edad del hormigón al momento de carga y al inicio de la retracción, respectivamente.

La relación tensión-deformación del hormigón para cargas instantáneas puede expresarse de acuerdo a la Ecuación (2) [6, 7]:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_c}{E_c} \text{ para } -0.40 \cdot f_{cm} \leq \sigma_c \leq f_{ctm} \quad (2)$$

siendo  $\sigma_c$  la tensión,  $f_{cm}$  y  $f_{ctm}$  son la resistencia media a compresión y la resistencia media a tracción, respectivamente, y  $E_c$  el módulo de elasticidad secante.

Cuando el hormigón es sometido a cargas de larga duración cuya magnitud varía en el tiempo, la deformación unitaria total puede obtenerse a partir del principio de superposición [8]. La aplicación de este principio requiere del cumplimiento de las hipótesis de linealidad [9]. La deformación unitaria total a temperatura constante puede escribirse como la Ecuación (3):

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0)\sigma_c(t_0) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} J(t, \tau)d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (3)$$

donde  $\sigma_c(t_0)$  es la tensión en el hormigón en el instante  $t_0$ ,  $J(t, \tau)$  es la función de fluencia del hormigón entre los tiempos  $\tau$  y  $t$ , su expresión viene dada por la Ecuación (4):

$$J(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (4)$$

siendo  $\varphi(t, \tau)$  el coeficiente de fluencia entre los tiempos  $\tau$  y  $t$ , y  $E_c(\tau)$  el módulo de elasticidad del hormigón en el tiempo  $\tau$ .

## 2.2 Acero activo y pasivo

La relación tensión-deformación para los aceros pasivo y activo puede considerarse lineal hasta la tensión de fluencia mediante la utilización de diagramadas idealizados [7]. La Ecuación (5) establece la relación constitutiva para el acero pasivo y activo:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (5)$$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p$$

donde  $\sigma_s$ ,  $E_s$  y  $\varepsilon_s$  representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero pasivo, respectivamente, y  $\sigma_p$ ,  $E_p$  y  $\varepsilon_p$  representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero activo, respectivamente.

Bajo la hipótesis de adherencia perfecta entre el acero pasivo y el hormigón, la deformación unitaria del acero pasivo será igual a la deformación unitaria de una fibra del hormigón ubicada en la misma posición que dicho acero. Sin embargo, al no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado no adherente y el hormigón, la condición de compatibilidad entre este acero y el hormigón puede escribirse como la Ecuación (6) [2]:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \frac{1}{l_{p,0}} \int_{x=0}^{x=l} \Delta \varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (6)$$

siendo  $\varepsilon_{p,0}$  la deformación unitaria inicial del acero activo,  $l_{p,0}$  y  $l$  la longitud inicial del acero activo y la longitud de la viga, respectivamente, y  $\Delta \varepsilon_{c,p}(x)$  es el cambio en la deformación unitaria del hormigón en una fibra que coincide con la ubicación del tendón en una sección ubicada a una distancia  $x$  del extremo de la viga.

Debido al procedo de relajación que experimenta el acero cuando es sometido a tensiones superiores al 40% de su resistencia máxima característica  $f_{p,max,k}$ , la relación tensión-deformación para el acero de pretensado puede obtenerse a partir del modelo del coeficiente de relajación  $\chi_r$  [10].

## 3. Contribución del hormigón entre fisuras

Cuando en una sección de un elemento sometido a flexión compuesta la tensión de tracción en el hormigón sobrepasa  $f_{ctm}$ , la sección se fisura. Si bien el hormigón no es capaz de llevar tensión en la sección fisurada, continúa llevando tensión entre las fisuras, colaborando así con la rigidez del elemento. Esta contribución del hormigón entre fisuras se denomina *tension stiffening* [11].

Cuando la sección del elemento es sometida a preso-flexión, como es el caso de elementos de hormigón pretensado, la contribución del hormigón entre fisuras es menos significativa que en el caso de elementos sometidos a flexión pura o a tenso-flexión. De acuerdo con Torres et al. [12] si la relación entre el momento de fisuración y el momento de descompresión es menor o igual a dos, la contribución del hormigón entre fisuras puede ser despreciada. Dicha relación puede expresarse de otra manera como en la Ecuación (7) [12]:

$$\frac{f_{ctm} A_c}{|F_N|} \leq 1 \quad (7)$$

siendo  $A_c$  el área bruta de la sección de hormigón y  $|F_N|$  el valor absoluto de la fuerza axial (compresiones negativas).

En un elemento pretensado, no sometido a fuerzas axiales externas, la relación  $|F_N|/A_c$  corresponde a la tensión media de pretensado en la sección. En términos generales, debido a las condiciones de servicio de una pieza pretensada (por ejemplo la limitación del ancho de fisura) la tensión media de pretensado suele ser bastante

superior que  $f_{ctm}$ . No obstante, de no cumplirse la condición dada por la Ecuación (7) la contribución del hormigón entre fisuras puede estimarse de acuerdo a los criterios expuestos en [11].

#### 4. Aplicación del método paso a paso a vigas compuestas con pretensado interior no adherente

La Figura 1 muestra un procedimiento general de construcción de una viga compuesta de hormigón de un tablero de un puente en el cual la losa del tablero se hormigona en sitio.

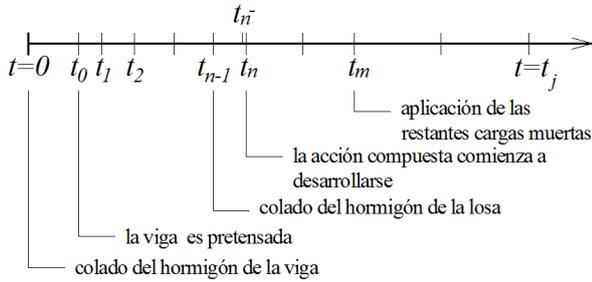


Figura 1. Escala temporal de un procedimiento general de construcción de un puente.

Consideremos una viga estáticamente determinada de hormigón, pretensada con pretensado interior no adherente. Consideremos que la sección transversal de la viga es simétrica con respecto al eje  $z$  y que el origen  $O$  del eje coordenado se elige arbitrariamente sobre el eje de simetría. Supongamos que la viga tiene  $m_s$  capas de acero pasivo y  $m_p$  capas de acero activo. Como caso más general, consideremos que bajo la acción del pretensado y las cargas de larga duración la viga puede estar fisurada (Figura 2).

Teniendo en cuenta las hipótesis de Euler-Bernoulli la deformación unitaria en una fibra ubicada a una distancia  $z$  del punto de referencia  $O$ , en una sección ubicada a una distancia  $x$  del extremo de la viga y en un tiempo  $t_j$ , puede escribirse como la Ecuación (8):

$$\varepsilon(t_j, x, z) = \varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) \quad (8)$$

donde  $\varepsilon_r(t_j, x)$  y  $\kappa(t_j, x)$  son la deformación unitaria en  $O$  y la curvatura, respectivamente.

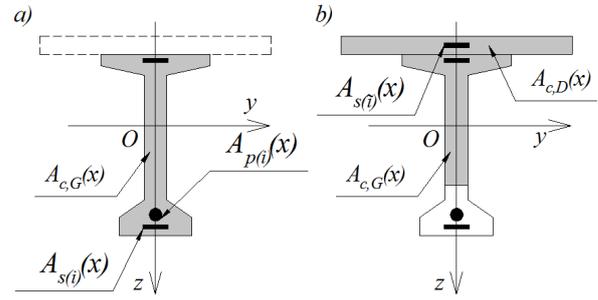


Figura 2. a) Sección de la viga. Capas de acero pasivo y activo no adherente. Ejes de referencia. b) Sección de la viga compuesta. Áreas de hormigón no fisuradas.

Las relaciones constitutivas para el hormigón de la viga en todo tiempo  $t_j > t_0$  y para el hormigón de la losa en todo tiempo  $t_j > t_{n-1}$  pueden escribirse como en las Ecuaciones (9) y (10), respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) &= E_{c,G}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \sigma_{c,G}(t_i, x, z) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) &= E_{c,D}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_{n-1}, t_n - t_{n-1}) - \varepsilon(t_{n-}, x, z)) \\ &+ \sum_{i=n}^{j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \sigma_{c,D}(t_i, x, z) \end{aligned} \quad (10)$$

donde,  $t_{n-1}$  es el tiempo cuando es colocado el hormigón de la losa,  $t_n$  es el tiempo cuando la acción compuesta comienza a desarrollarse,  $t_{n-}$  representa un instante de tiempo justo antes de que la acción compuesta se desarrolle, el término  $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$  representa la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa en el instante  $t_{n-}$ , justo antes que la acción compuesta se desarrolle (deformación "ficticia"). La inclusión del término  $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$  garantiza que la losa de concreto esté descargada en el instante  $t_n$ .  $F_{e,G}(t_j, t_i)$  y  $F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1})$  vienen dados por las Ecuaciones (11) y (12), respectivamente [13]:

$$F_{e,G}(t_j, t_i) = (J_G(t_j, t_{i+1}) - J_G(t_j, t_i)) / J_G(t_j, t_j) \quad (11)$$

$$F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) = J_D(t_j - t_{n-1}, t_{i+1} - t_{n-1}) / J_D(t_j - t_{n-1}, t_j - t_{n-1}) - J_D(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) / J_D(t_j - t_{n-1}, t_j - t_{n-1}) \quad (12)$$

La relación constitutiva para el acero pasivo de la  $i$ -ésima capa ( $1 \leq i \leq m_s(x)$ ) para todo tiempo  $t_j \geq t_0$  vienen dada por la Ecuación (13):

$$\sigma_{s(i)}(t_j, x) = E_{s(i)} \varepsilon(t_j, x, z_{s(i)}) \quad (13)$$

Si a la losa se le adicionan  $\hat{m}_s(x)$  capas de acero pasivo en cualquier sección ( $t_j \geq t_n$ ), la relación constitutiva para el acero pasivo adicionado ( $1 \leq \tilde{i} \leq \hat{m}_s(x)$ ) viene dado por la Ecuación (14):

$$\sigma_{s(\tilde{i})}(t_j, x) = E_{s(\tilde{i})} (\varepsilon(t_j, x, z_{s(\tilde{i})}) - \varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\tilde{i})})) \quad (14)$$

donde  $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\tilde{i})})$  es la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa localizada en  $z_{s(\tilde{i})}$  y en el tiempo  $t_{n-}$  y  $z_{s(\tilde{i})}$  es la distancia desde el punto de referencia  $O$  hasta el centro de gravedad de la  $\tilde{i}$ -ésima capa de acero pasivo localizado en la losa. La inclusión del término  $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\tilde{i})})$  garantiza que el acero de la losa esté descargado en el instante  $t_n$ .

La relación constitutiva para el acero activo no adherente de la  $i$ -ésima capa ( $1 \leq i \leq m_p(x)$ ) para todo tiempo  $t_j \geq t_0$  viene dada por la Ecuación (15):

$$\sigma_{p(i)}(t_j, x) = E_{p(i)} \left( \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (15)$$

donde  $\varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) = \Delta \bar{\sigma}_{pr}(t_j - t_0) / E_p$ .

La fuerza axial y el momento flector resistido por el hormigón de la viga y la losa en una sección localizada a una distancia  $x$  y en un instante  $t_j > t_n$  vienen dados por las Ecuaciones (16) y (17), respectivamente:

$$\begin{aligned} N_c(t_j, x) &= \int_{A_{c,G}} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA \\ &= (A_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \varepsilon_r(t_j, x) \\ &\quad + (\hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \kappa(t_j, x) \\ &\quad - A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ &\quad - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) \\ &\quad - A_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \\ &\quad - A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) N_{c,G}(t_i, x) \\ &\quad + \sum_{i=n}^{j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) N_{c,D}(t_i, x) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_c(t_j, x) &= \int_{A_{c,G}} z \cdot \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} z \cdot \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA = \\ &= (\hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \varepsilon_r(t_j, x) \\ &\quad + (\hat{I}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \kappa(t_j, x) \\ &\quad - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ &\quad - \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) \\ &\quad - \hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \\ &\quad - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) M_{c,G}(t_i, x) \\ &\quad + \sum_{i=n}^{j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) M_{c,D}(t_i, x) \end{aligned} \quad (17)$$

donde los subíndice  $G$  y  $D$  corresponden a la viga y a la losa respectivamente.  $A_{c,G}(x)$  y  $A_{c,D}(x)$  son

el área no fisurada del hormigón de la viga y de la losa, respectivamente,  $\hat{B}_{c,G}(x)$  y  $\hat{B}_{c,D}(x)$  son el momento de primer orden respecto al eje de referencia del área no fisurada de la viga y de la losa, respectivamente, y  $\hat{I}_{c,G}(x)$  y  $\hat{I}_{c,D}(x)$  son el momento de inercia del área no fisurada de la viga y de la losa respecto al eje de referencia, respectivamente.

La fuerza axial y el momento flector resistido por el acero activo no adherente y el acero pasivo en un sección localizada a una distancia  $x$  y en un instante  $t_j > t_n$  vienen dados por las Ecuaciones (18), (19), (20) y (21), respectivamente:

$$N_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left( \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (18)$$

$$M_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} z_{p(i)}(x) A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left( \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} N_s(t_j, x) &= \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \varepsilon_r(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_j, x) \\ &- \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ &- \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_n^-, x) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_s(t_j, x) &= \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})}^2 A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \varepsilon_r(t_j, x) \\ &+ \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})}^2 A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_j, x) \\ &- \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ &- \sum_{\bar{i}=1}^{i=m_s(x)} z_{s(\bar{i})}^2 A_{s(\bar{i})}(x) E_{s(\bar{i})} \kappa(t_n^-, x) \end{aligned} \quad (21)$$

Dado que la resultante de las fuerzas internas (fuerza axial y momento flector) debe ser igual a las fuerzas externas en cada sección  $x$  y para todo tiempo  $t_j$  [14], teniendo en cuenta las Ecuaciones (16) a (21), obtenemos la Ecuación (22):

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_A(t_j, x) & R_B(t_j, x) \\ R_B(t_j, x) & R_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ \kappa(t_n^-, x) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_i, x) \\ M_{c,G}(t_i, x) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=n}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i \\ &- t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_i, x) \\ M_{c,D}(t_i, x) \end{bmatrix} \\ &- E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} \\ &- E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \\ &- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $R_A(t_j, x)$ ,  $R_B(t_j, x)$  y  $R_I(t_j, x)$  representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional,

respectivamente, de la sección compuesta respecto a los ejes de referencia. Sus expresiones vienen dadas por la Ecuación (23):

$$\begin{aligned}
R_A(t_j, x) &= A_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) \\
&+ A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x)E_{s(i)} \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})} \\
R_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) \\
&+ \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x)E_{s(i)} \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
R_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x)E_{s(i)} \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} z_{s(\bar{i})}^2 A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})}
\end{aligned}$$

mientras que  $\hat{R}_A(t_j, x)$ ,  $\hat{R}_B(t_j, x)$  y  $\hat{R}_I(t_j, x)$  representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional, respectivamente, de la losa y del acero pasivo contenido en ella. Sus expresiones vienen dada por la Ecuación (24):

$$\begin{aligned}
\hat{R}_A(t_j, x) &= A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})} \\
\hat{R}_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} z_{s(\bar{i})} A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})} \\
\hat{R}_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \\
&+ \sum_{\bar{i}=1}^{\bar{i}=\bar{m}_s(x)} z_{s(\bar{i})}^2 A_{s(\bar{i})}(x)E_{s(\bar{i})}
\end{aligned} \tag{24}$$

La deformación del tendón no adherente localizado en la  $i$ -ésima capa y en el instante  $t_j$  viene dado la Ecuación (25):

$$\begin{aligned}
\Delta l_{p(i)}(t_j) &= \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_r(t_j, x) + z_{p(i)} \\
&\quad \cdot \kappa(t_j, x)) dx \\
&\quad - \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_{r,0,ref}(x) + z_{p(i)} \\
&\quad \cdot \kappa_{0,ref}(x)) dx
\end{aligned} \tag{25}$$

Luego, la deformación unitaria en el punto de referencia  $O$  y la curvatura en una sección localizada a una distancia  $x$  desde el extremo y en el instante  $t_j$  viene dado la Ecuación (26):

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&= \left( \frac{1}{(R_A(t_j, x)R_I(t_j, x) - R_B(t_j, x)^2)} \right) \cdot \\
&\begin{bmatrix} R_I(t_j, x) & -R_B(t_j, x) \\ -R_B(t_j, x) & R_A(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ \kappa(t_{n-}, x) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_i, x) \\ M_{c,G}(t_i, x) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=n} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i \\
&- t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_i, x) \\ M_{c,D}(t_i, x) \end{bmatrix} \\
&+ E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} \\
&+ E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{26}$$

## 5. Implementación computacional

Debido a la no linealidad que presentan las ecuaciones que gobiernan el problema en el análisis de este tipo de estructuras, para cada intervalo de tiempo, es necesario realizar un procedimiento iterativo. A los efectos de obtener

el alargamiento del acero de pretensado, y por la tanto la fuerza ejercida por éste, la integración de las deformaciones unitarias y las curvaturas se realiza mediante una integración numérica (para ello la viga se divide en un número discreto de secciones). Por otra parte, para cada sección, las propiedades geométricas dependen de la deformación unitaria y de la curvatura en dicha sección. Para efectuar el análisis seccional la sección de la viga (viga-losa) se divide en un número discreto de capas. Mediante un procedimiento de análisis iterativo-incremental basado en los algoritmos de Newton-Raphson se resuelve la Ecuación (26). Obtenidas las nuevas deformaciones unitarias y las curvaturas en todas las secciones se obtiene una nueva fuerza en los cables. En resumen, es necesaria la aplicación de un algoritmo de doble bucle hasta la convergencia del problema.

## 6. Validación

### 6.1 Ejemplo 1

La Figura 3 muestra la sección transversal de las vigas I ensayadas por Breckenridge y Bugg en el U.S. Civil Engineering Naval Laboratory en el año 1964. Las vigas simplemente apoyadas y de longitud de vano 12192 mm fueron curadas durante ocho días y luego pretensadas. Seis de ellas fueron postensadas con dos barras no adherentes de alta resistencia del sistema Stressteel. Cada barra de pretensado tenía un diámetro de 28.5 mm ( $A_p=641.29 \text{ mm}^2$ ), una resistencia a tracción nominal de 1007 MPa, un módulo de elasticidad de 200 GPa y la tensión efectiva de pretensado luego del anclaje de las barras fue de 683.23 MPa. El área bruta de la sección de la viga fue de  $A_c = 11.645 \times 10^4 \text{ mm}^2$  y el momento de inercia de  $I_c = 51.476 \times 10^8 \text{ mm}^4$ . El trazado de las barras de pretensado está dados por las Ecuaciones (27) y (28). El acero pasivo consistió en ocho barras de 9.50 mm de diámetro ( $A_s = 70.79 \text{ mm}^2$ ), tensión de fluencia 335 MPa y módulo de elasticidad 168.9

MPa. Se utilizó cemento de resistencia normal y la resistencia característica del hormigón fue de 36.27 MPa.

Cada par de vigas fue sometido cargas de diferente magnitud y mantenida constante por un período de tiempo de aproximadamente 6.5 años. Durante ese tiempo la temperatura promedio fue de 15.6°C y la humedad relativa promedio de 72.8%. El primer par de vigas fue sometido a su peso propio, el segundo par a su peso propio y a una sobrecarga de diseño, y el tercer par a su peso propio y a 1.5 veces la sobrecarga de diseño, denominemos Casos N°1, N°2 y N°3, respectivamente. La sobrecarga de diseño consistió en dos cargas concentradas de 67613 N aplicadas a un cuarto de la longitud de vano desde cada extremo y aplicada a los 22 días luego de colado el hormigón.

$$d_{p(1)}(x) = -3.5334 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 20.4605 \times 10^{-2} \cdot x + 192.79 \text{ para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm}$$

$$d_{p(1)}(x) = 488.95 \text{ para } 2895.6 \leq x < 9296.4 \text{ mm} \quad (27)$$

$$d_{p(1)}(x) = -3.5334 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 65.7029 \times 10^{-2} \cdot x - 2564.89 \text{ para } 9296.4 \leq x \leq 12192 \text{ mm}$$

$$d_{p(2)}(x) = -1.6119 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 9.3341 \times 10^{-2} \cdot x + 417.32 \text{ para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm}$$

$$d_{p(2)}(x) = 552.45 \text{ para } 2895.6 \leq x < 9296.4 \text{ mm} \quad (28)$$

$$d_{p(2)}(x) = -1.6119 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 29.9698 \times 10^{-2} \cdot x - 840.49 \text{ para } 9296.4 \leq x \leq 12192 \text{ mm}$$

Los parámetros del concreto se calcularon de acuerdo con el CEB-FIB [12], teniendo en cuenta las correcciones debidas a temperatura. Los módulos de elasticidad del hormigón a los 8 días y a los 22 días son  $E_c(8) = 26.44 \text{ GPa}$  y  $E_c(22) = 29.31 \text{ GPa}$ , respectivamente. Los

coeficientes de fluencia son  $\varphi(22, 8) = 0.913$ ,  $\varphi(2373, 8) = 1.915$  y  $\varphi(2373, 22) = 1.564$ , la retracción es  $\varepsilon_{sh}(2373, 8) = -385.84 \times 10^{-6}$  y  $\varepsilon_{sh}(2373, 8) = -72.97 \times 10^{-6}$ . Las pérdidas de tensión del acero de pretensado debida a relajación entre los 8 días y los 2373 días y entre los 8 días y los 22 días son de  $\sigma_{pr}(2365) = 28.5$  MPa and  $\Delta\sigma_{pr}(14) = 12.9$  MPa, respectivamente.

La Tabla 1 muestra, para cada uno de los casos, la comparación de los valores de la pérdida de pretensado medida y la pronosticada, mientras que la Tabla 2 muestra el comparativo de los valores de deformación máxima. Se observan diferencias poco significativas. En la Figura 4 se muestra la tensión en el hormigón en la sección central de la viga a los 8, 22 y 2373 días para el Caso N°3.

**Tabla 1. Comparativo de los valores de la pérdida de pretensado entre lo medido y lo pronosticado.**

Pérdida de pretensado a 2373 días en [MPa]		
Caso N°	Medido	Modelo computacional
1	150.3	154.9
2	94.9	98.2
3	34.2	43.5

**Tabla 2. Comparativo de los valores de deformación en el centro del vano (flecha).**

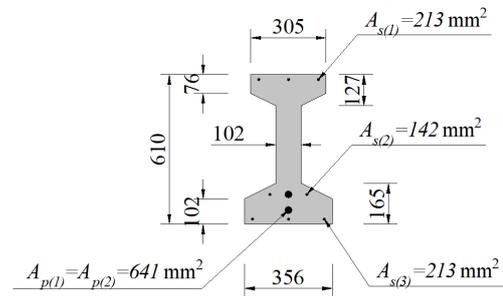
Deformación a 2373 días en [mm] (*)		
Caso N°	Medido	Modelo computacional
1	-30.1	-30.4
2	35.6	26.9
3	87.6	71.7

(\*) Valores positivos hacia abajo.

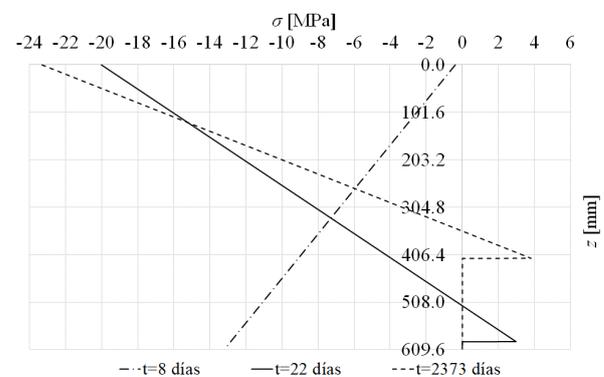
## 6.1 Ejemplo 2

Supongamos a modo de ejemplo que a la viga con pretensado interior no adherente del ejemplo anterior, bajo las mismas condiciones de fabricación y de exposición ambiental se le hormigona una losa a los 35 días. Consideremos que la dimensión de la losa es de 1000 mm × 200 mm y que su resistencia característica es de 25

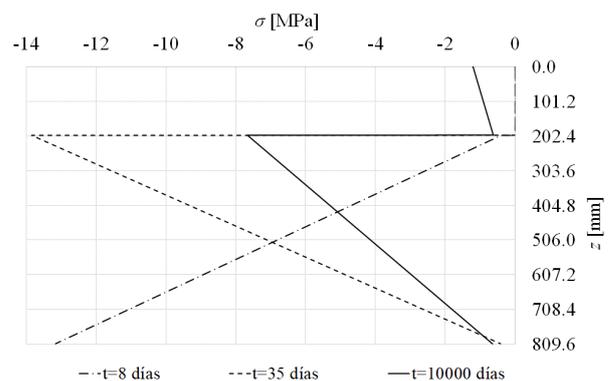
MPa. Supongamos además que una carga permanente uniformemente distribuida de 11.1 kN/m a los 35 días. Esta carga incluye el peso propio de la losa y cualquier otra carga muerta. Se pretende calcular la pérdida de pretensado.



**Figura 3. Sección de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg [14].**



**Figura 4. Evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga para el Caso N°3.**



**Figura 5. Evolución de la tensión en el hormigón en la construcción compuesta a diferentes edades.**

Los parámetros del hormigón han sido calculados de acuerdo al CEB-FIP [12]. El módulo de elasticidad del hormigón de la viga a los 35 días es  $E_{c,G}(35) = 30.28$  GPa. Los coeficientes de fluencia de la viga son  $\varphi_G(35, 8) = 1.039$ ,  $\varphi_G(10000, 35) = 1.606$  y

$\varphi_G(10000, 8) = 2.119$ , la retracción es  $\varepsilon_{sh,G}(10000, 8) = -401.41 \times 10^{-6}$  y  $\varepsilon_{sh,G}(35, 8) = -101.74 \times 10^{-6}$ . El módulo de elasticidad de la losa a los 3 días de edad es  $E_{C,D}(3) = 19.96$  GPa. El coeficiente de fluencia de la losa es  $\varphi_D(9965, 3) = 3.288$ , y la retracción de la losa es  $\varepsilon_{sh,D}(9965, 3) = -445.00 \times 10^{-6}$ .

La pérdida de pretensado estimada a 10000 días es de 125.1 MPa (14.3 %). La Figura 5 muestra la evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga.

## 6. Comentarios finales y conclusiones

La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, como se muestra en el Ejemplo 1, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente a lo largo del tiempo. Si bien algunas diferencias se observan en relación al Caso N°3, es oportuno mencionar que las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.

Podemos concluir además que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.

### Referencias

[1] Comité Euro-International du Béton (CEB). Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance, vol. 2. CEB-FIP Bulletin no. 52, Lausanne, Switzerland, 2010.

[2] D.P. Gauvreau, Ultimate limit state of concrete girders prestressed with unbonded tendons. Birkhauser Verlag Basel, 1993.

[3] T. Guo, Z. Chen, S. Lu, R. Yao, Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams, Measurement. 122 (2018) 573-581.

[4] P.M. Páez, B. Sensale, Improved prediction of prestress loss in unbonded prestressed concrete members, Engineering Structures. 174 (2018) 111-125.

[5] Z.P. Bazant, Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In Z.P. BaZant and F.H. Wittmann (eds.), Creep and Shrinkage in Concrete Structures, Wiley, London, 1982, pp. 163-256.

[6] D.E. Branson, H. Trost, Unified procedures for predicting the deflection and centroidal axis location of partially cracked non-prestressed and prestressed concrete members, ACI J, 79 (1982) 119-30.

[7] Comité Euro-International du Béton (CEB). Model Code 2010, vol. 1. CEB-FIP Bulletin no. 65, Lausanne, Switzerland, 2012.

[8] D.A. McHenry, A new aspect of creep in concrete and its application to design, ASTM Proc., 43 (1943).

[9] A.D. Ross, Creep of concrete under variable stress. Journal of the American Concrete Institute. 54 (1958) 739-58.

[10] A. Galhi, R. Favre, M. Eldbadry, Concrete structures: stresses and deformation. 3rd ed. New York: Spon Press, 2002.

[11] Comité Euro-International du Béton (CEB). Desing manual on cracking and deformations. Lausanne, Switzerland, 1985.

[12] Ll. Torres, F. López-Almanza, L.M. Bozzo, Tension-stiffening model for cracked flexural concrete members, Journal of Structural Engineering. 130 (2004) 1242-51.

[13] R.I. Gilbert, G. Ranzi, Time-dependent behavior of concrete structures. New York: Spon Press, 2011.

[14] C. Menn, Prestressed concrete bridges. BirkhauserVerlag AG Basel, Berlín, 1990.

[15] R. A. Breckenridge, S. L. Bugg, Effect of long-time loads on prestressed concrete beams. PCI

Journal. December 1964, 75-89.